测量误差和数据处理

李嘉轩

1600011628

北京大学物理学院天文学系, 100871

jiaxuan_li@pku.edu.cn

2017 年 10 月 21 日

1 用游标卡尺测量钢杯含钢体积

本实验要求使用游标卡尺测量钢杯含钢体积，并估计测量结果的不确定度。本次实验用到的器材有:

- 游标卡尺(量程125 mm，分度值0.02 mm)；
- 实验室提供的钢杯。

表 1: 使用游标卡尺测量钢杯含钢体积

项目	$D/\mathbf{cm}$	$d/\mathbf{cm}$	$H/\mathbf{cm}$	$h/\mathbf{cm}$
零点	$D_0 = 0.000$	$d_0 = 0.000$	$H_0 = 0.000$	$h_0 = 0.000$
1	2.812	1.998	4.510	3.198
2	2.814	1.996	4.506	3.198
3	2.812	1.996	4.510	3.198
4	2.810	1.998	4.508	3.194
5	2.814	2.000	4.510	3.196
6	2.810	2.000	4.508	3.198
平均值	2.8120	1.9980	4.5087	3.1970

根据测量出的数据(见表1)，我们可以分别算出每个物理量的平均值，见表1的最后一行。为了保证在对物理量进行运算时四舍五入不增大误差，在计算平均值时我们对平均值多保留了一位有效数字。

对于物理量X，测量数据X_i分布在平均值$\bar{X}$周围，我们用标准偏差$\sigma_{\bar{X}}$来描述之：

$$\sigma_{\bar{X}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n(n-1)}}. \tag{1}$$

由式(1)，我们分别算出D, d, H, h的标准偏差：

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{D}}&=\sqrt{\frac{2\times(2.814-2.8120)^2+2\times(2.810-2.8120)^2}{5\times 6}}\ \text{cm}\\&=0.0007\ \text{cm}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{H}}&=\sqrt{\frac{2\times(1.996-1.9980)^2+2\times(2.000-1.9980)^2}{5\times 6}}\ \text{cm}\\&=0.0007\ \text{cm}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{H}}&=\sqrt{\frac{3\times(4.510-4.5087)^2+(4.506-4.5087)^2+2\times(4.508-4.5087)^2}{5\times 6}}\ \text{cm}\\&=0.0007\ \text{cm}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{h}}&=\sqrt{\frac{4\times(3.918-3.9170)^2+(3.916-3.9170)^2+(3.914-3.9170)^2}{5\times 6}}\ \text{cm}\\&=0.0007\ \text{cm}.\end{aligned}$$

这些标准偏差只反映了本次测量数据点的分布情况(即随机误差)，并没有考虑系统误差。此处，系统误差分为两部分，即**已定系统误差**与**未定系统误差**。已定系统误差即游标卡尺零点的位置，在本次实验中，每次测量前都记录了刀口相互靠紧时游标卡尺的读数，均为0.000cm，因此本次实验中无需修正零点位置。未定系统误差主要为游标卡尺的允差。从课本 [1]第74页可以查到，此游标卡尺的允差为±0.002cm，即测量极限误差为

$$e=0.002\ \text{cm}.$$

如果我们认为游标卡尺的未定系统误差分布为均匀分布，则有

$$\sigma_e=\frac{e}{\sqrt{3}}=0.0012\ \text{cm}. \tag{2}$$

综上所述，考虑到测量数据的标准差与未定系统误差，我们得到本次实验直接测量的不确定度为：

$$\sigma_X=\sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2+\sigma_e^2}. \tag{3}$$

带入具体数据，有：

$$\sigma_D=0.0014\ \text{cm}; \tag{4}$$
$$\sigma_d=0.0014\ \text{cm}; \tag{5}$$
$$\sigma_H=0.0014\ \text{cm}; \tag{6}$$
$$\sigma_h=0.0014\ \text{cm}. \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

至此，本次直接测量的物理量可以表达为：

$$\overline{D} \pm \sigma_D = (2.812 \pm 0.001)\ \text{cm}; \tag{9}$$
$$\overline{d} \pm \sigma_d = (1.998 \pm = 0.001)\ \text{cm}; \tag{10}$$
$$\overline{H} \pm \sigma_H = (4.508 \pm 0.001)\ \text{cm}; \tag{11}$$
$$\overline{h} \pm \sigma_h = (3.197 \pm 0.001)\ \text{cm}. \tag{12}$$
$$\tag{13}$$

将式(9)-(12)带入钢杯含钢体积公式(14)

$$V = \frac{\pi}{4}\left(\overline{D}^2\overline{H} - \overline{d}^2\overline{h}\right) \tag{14}$$

可得:

$$V = 17.98\ \text{cm}^3. \tag{15}$$

V是间接测量的物理量，其不确定度满足式(16):

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \overline{D}}\sigma_D\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \overline{d}}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \overline{H}}\sigma_H\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \overline{h}}\sigma_h\right)^2} \tag{16}$$
$$= \frac{\pi}{4}\left[\left(2\bar{D}\bar{H}\sigma_D\right)^2 + \left(\overline{D}^2\sigma_H\right)^2 + \left(2\bar{d}\ \bar{h}\sigma_d\right)^2 + \left(\overline{d}^2\sigma_h\right)^2\right]^{1/2} \tag{17}$$
$$= 0.03\ \text{cm}^3. \tag{18}$$

至此，本次实验的结果表述为：

$$V \pm \sigma_V = (17.98 \pm 0.03)\ \text{cm}^3. \tag{19}$$

2 用螺旋测微器测量小钢球体积

本实验要求使用螺旋测微器测量小钢球体积，并估计测量结果的不确定度。本次实验用到的器材有:

- 螺旋测微器；
- 实验室提供的小钢球。

表 2: 使用螺旋测微器测量小钢球体积

测量次数	1	2	3	4	5	6
d/**cm**	1.2696	1.2695	1.2695	1.2697	1.2694	1.2695
零点读数	$d_0 = -0.0001$ cm					

一共进行了6次测量，数据见表2。根据表中数据，可以求出小球直径的平均值：

$$\overline{d'} = 1.26953\ \text{cm}.$$

为了保证在对物理量进行运算时四舍五入不增大误差，在计算平均值时我们对平均值多保留了一位有效数字。

根据第一节中的式(1)，我们算得

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{(1.2696-1.26953)^2+(1.2697-1.26953)^2+(1.2694-1.26953)^2+3\times(1.2695-1.26953)^2}{5\times 6}}\ \text{cm}$$
$$= 0.00004\ \text{cm}.$$

从课本 [1]第74页可以查到，此螺旋测微器的允差为±0.0004cm，即测量极限误差为

$$e = 0.0004\ \text{cm}.$$

如果我们认为螺旋测微器的未定系统误差分布为均匀分布，则有

$$\sigma_e = \frac{e}{\sqrt{3}} = 0.00023\ \text{cm}. \tag{20}$$

综上所述，考虑到测量数据的标准差与未定系统误差，我们得到本次实验测量d的不确定度为：

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2+\sigma_e^2} = 0.00023\ \text{cm}. \tag{21}$$

由于此时已定系统误差已知，即零点读数不为零，所以我们修正零点读数误差之后的平均值为

$$\overline{d} = 1.26963\ \text{cm}.$$

综上，测量小钢球直径的结果可以表示为：

$$\overline{d} \pm \sigma_d = (1.26963 \pm 0.00023)\ \text{cm}. \tag{22}$$

将式(22)的结果带入体积计算公式

$$V = \frac{1}{6}\pi\overline{d}^3$$

可得：

$$V = 1.0716\ \text{cm}^3. \tag{23}$$

由间接测量量不确定度传递公式，V的不确定度可以写为：

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \overline{d}}\sigma_d\right)^2}$$

代入数据得：

$$\sigma_V = 0.0006\ \text{cm}^3. \tag{24}$$

至此，小钢珠的体积可以表达为

$$V \pm \sigma_V = (1.0716 \pm 0.0006)\ \text{cm}^3.$$

3 习题

1. **指出下列各量是几位有效数字：**

   (a) 0.00001 cm

   (b) 1.000 s

   (c) 2.7×10^{25} J

   (d) 980.120 cm·s^2

   答：分别为1位有效数字、4位有效数字、2位有效数字、6位有效数字。

2. **计算下列间接测量物理量的数值：**

   (a) 已知 $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$，并测得 $a=9.9$ cm，$b=999.9$ cm，求 c.

   解：

   $$c=\frac{ab}{b-a}=9.999 \text{ cm}.$$

   但这不是 c 的测量值。根据不确定度传递公式，而且 $\sigma_a=\sigma_b=0.1$ cm，于是我们有：

   $$\begin{aligned}\sigma_c&=\sqrt{(\frac{b^2}{(b-a)^2}\sigma_a)^2+(\frac{a^2}{(b-a)^2}\sigma_b)^2}\\&=0.1 \text{ cm}.\end{aligned}$$

   测量值有效数字位数应该与不确定度保持一致，所以最终测量值 $c=10.0$ cm.

   (b) 已知 $y=e^{-x^2}$，并测得 $x=9.24$，求y.

   解：直接带入数据得

   $$y=8.33642\times10^{-38}.$$

   根据不确定度传递公式，而且 $\sigma_x=0.01$，于是我们有：

   $$\begin{aligned}\sigma_y&=2xe^{-x^2}\sigma_x\\&=1.5\times10^{-38}.\end{aligned}$$

   所以最终测量值$y=8\times10^{-38}$.

   (c) 已知 $y=\ln x$，并测得 $x=56.7$，求y.

   解：直接带入数据得

   $$y=4.03777.$$

   根据不确定度传递公式，而且 $\sigma_x=0.1$，于是我们有：

   $$\begin{aligned}\sigma_y&=\frac{\sigma_x}{x}\\&=0.0018.\end{aligned}$$

   所以最终测量值 $y=4.038$.

(d) 已知 $y=\cos x$，并测得 $x=$9°24′，求y.

解：直接带入数据得

$$y = 0.986572.$$

根据不确定度传递公式，而且 $\sigma_x = 1' = 0.000290888$ rad，于是我们有：

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_x \sin x \\ &= 0.00005.\end{aligned}$$

所以最终测量值 $y = 0.98657$.

3. **写出下列间接测量物理量的标准偏差(课本练习题3的(b)(c)两小问)**：

(a) **解**：

$$\begin{aligned}\sigma_\rho &= \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial m_1}\sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial m_2}\sigma_{m_2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\rho_0 m_2}{(m1-m2)^2}\sigma_{m_1}\right)^2 + \left(\frac{\rho_0 m_1}{(m1-m2)^2}\sigma_{m_2}\right)^2} \\ &= \frac{\rho_0}{|m_1-m_2|}\sqrt{(m_1\sigma_{m_2})^2 + (m_2\sigma_{m_1})^2}.\end{aligned}$$

(b) **解**：

$$\sigma_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\sigma_b\right)^2} \tag{25}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{b}{a(a+b)}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{a}{b(a+b)^2}\sigma_b\right)^2} \tag{26}$$

$$= \frac{1}{|a+b|}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\sigma_a\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\sigma_b\right)^2}. \tag{27}$$

4. ***课本习题4***

解：有三种测量方法：

(a) 测量L_2，d_1，d_2，则$L = L_2 - \frac{1}{2}(d_1+d_2)$;

(b) 测量L_1，d_1，d_2，则$L = L_1 + \frac{1}{2}(d_1+d_2)$;

(c) 测量L_1，L_2，则$L = \frac{1}{2}(L_1+l_2)$;

以上几种方法的计算公式都是线性相加，所以其不确定度就是几个直接测量值不确定度的方和跟。因此：对于(a)方法，

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_{L_2}^2 + \frac{\sigma_{d_1}^2}{4} + \frac{\sigma_{d_2}^2}{4}} = 1.1\ \mu\text{m};$$

对于(b)方法，

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma_{L_1}^2 + \frac{\sigma_{d_1}^2}{4} + \frac{\sigma_{d_2}^2}{4}} = 0.9\ \mu\text{m};$$

对于(c)方法，

$$\sigma_L = \sqrt{\frac{\sigma_{L_1}^2}{4} + \frac{\sigma_{L_2}^2}{4}} = 0.6\ \mu\text{m}.$$

因此使用(c)方法得到结果的不确定度最小。可见，间接测量一个物理量时，直接测量的物理量不宜太多，否则会引入较大的不确定度。

5. **课本习题5**

答：

$$S = L_1 L_2 - \frac{\pi}{4}(d_1^2 + d_2^2).$$

根据不确定度传递公式：

$$\sigma_S = \sqrt{L_1^2\sigma_{L_2}^2 + L_2^2\sigma_{L_1}^2 + \frac{\pi^2}{4}d_1^2\sigma_{d_1}^2 + \frac{\pi^2}{4}d_2^2\sigma_{d_2}^2}.$$

根据要求：$\dfrac{\sigma_S}{S} \leqslant 0.5\%$，我们可以反推出$\sigma_{d_2}$的值。

$$\sigma_{d_2} \leqslant 1.2\ \text{cm}.$$

所以只需要用米粗尺测一下即可。

6. **课本习题7**

解：

(1) 根据题目给的信息，有$\dfrac{\delta_h}{h} = -10^{-4}$，实际测量值要比真实值偏小$|\delta_h|$；实际测量的时间$t$也要比真实值偏小$|\delta_t|$，其中$\delta_t = -10^{-4}t$。把$g = \dfrac{2h}{t^2}$两边全微分，得到：

$$\delta_g = \frac{2\delta_h}{t^2} - \frac{4h\delta_t}{t^3},$$

$$\delta_g = -\frac{2\times 10^{-4}h}{t^2} + \frac{4\times 10^{-4}h}{t^2},$$

$$\frac{\delta_g}{g} = -10^{-4} + 2\times 10^{-4} = 10^{-4}.$$

因此实际测量出的结果预期是$g' = 980.1\ \text{cm/s}^2$.

(2) 根据题目意思，如果要让近似结果的准确度不小于99.5%，即

$$\frac{|T_0 - T|}{T} \leqslant 0.5\%,$$

带入T_0和T的表达式后，有：

$$\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} \leqslant 0.005,$$

解得

$$\theta_{0.5\%} \leqslant 16.3°.$$

如果要让近似结果的准确度不小于99.95%，即

$$\frac{|T_0 - T|}{T} \leqslant 0.05\%,$$

带入T_0和T的表达式后，有：

$$\frac{1}{4}\sin^2\frac{\theta}{2} \leqslant 0.0005,$$

解得

$$\theta_{0.05\%} \leqslant 5.13°.$$

从以上结果可以看出，我们平时使用的公式

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

是一个不错的近似。

7. ***课本习题10***

解：根据最小二乘法原理，

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{10}(i_k - \bar{i})(y_k - \bar{y})}{\sum\limits_{k=1}^{10}(i_k - \bar{i})^2}.$$

根据本次测量的数据，带入公式可得($\hat{\lambda}$表示λ的估计值)：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{10}(i_k - \bar{i})^2 = 82.500,\\
&\sum_{k=1}^{10}(i_k - \bar{i})(y_k - \bar{y}) = 722.110 \text{ mm},\\
&\hat{\lambda} = 8.75284 \text{ mm},\\
&r = 0.99997.
\end{aligned}$$

从而声速为

$$c = f\lambda = 346.437 \text{ m/s}.$$

下面估计不确定度。根据最小二乘法斜率的不确定度的估计方法，

$$\sigma_\lambda = \frac{\sigma_{y_i}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{10}(i_k - \bar{i})^2}}. \tag{28}$$

首先要估计 σ_{y_i}。这里认为声速测定仪测位置尺误差e的分布与示波器读数误差 e_{y_i} 的分布都是均匀分布，于是有

$$\sigma_{y_i} = \sqrt{\left(\frac{e}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{e_{y_i}}{\sqrt{3}}\right)^2} = 0.004 \text{ mm}.$$

所以带入式(28)，有

$$\sigma_\lambda = 0.00004\ \mathrm{mm}.$$

至此，声波波长测量结果为：

$$\lambda \pm \sigma_\lambda = (8.75284 \pm 0.00004)\ \mathrm{mm}.$$

声速c的不确定度中，$\sigma_f = \dfrac{e}{\sqrt{3}} = 0.029\ \mathrm{kHz}$，因此：

$$\sigma_c = \sqrt{\lambda^2\sigma_f^2 + f^2\sigma_\lambda^2} = 0.25\ \mathrm{m/s}.$$

至此，本次声速测量的结果为：

$$c \pm \sigma_c = (346.44 \pm 0.25)\ \mathrm{m/s}.$$

8. ***课本习题11***

解：

(1) 将m和$\dfrac{1}{t^2}$在坐标纸上作图，如下图所示，可以看出m和$\dfrac{1}{t^2}$是线性关系。

(2) 如果把m作为自变量，$\dfrac{1}{t^2}$作为因变量，使用最小二乘法公式

$$k_1 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(m_i - \overline{m})\left(\frac{1}{t_i^2} - \overline{\frac{1}{t^2}}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{7}(m_i - \overline{m})^2} \tag{29}$$

得到：

$$k_1 = 0.07903\ (10^{-2}\mathrm{s}\cdot\mathrm{g}^{-1}).$$

相关系数为

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(m_i - \overline{m})\left(\frac{1}{t_i^2} - \overline{\frac{1}{t^2}}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(m_i - \overline{m})^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{7}\left(\frac{1}{t_i^2} - \overline{\frac{1}{t^2}}\right)^2}} \tag{30}$$

算得：

$$r = 0.9993.$$

样本中心点为$\overline{m} = 25.00$, $\overline{\frac{1}{t^2}} = 1.7696$, 最小二乘法拟合后的直线过样本中心点，所以

$$b_1 = -0.2061\ (10^{-2}\mathrm{s}).$$

(3) 如果把$\dfrac{1}{t^2}$作为自变量，m作为因变量，使用最小二乘法公式

$$k_2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{7}(m_i - \overline{m})\left(\frac{1}{t_i^2} - \overline{\frac{1}{t^2}}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{7}\left(\frac{1}{t_i^2} - \overline{\frac{1}{t^2}})\right)^2} \tag{31}$$

得到：

$$k_2 = 12.6367\ (10^{2}\mathrm{g}\cdot\mathrm{s}^{-1}).$$

相关系数为

再次使用式(30)算得相关系数：

$$r = 0.9993.$$

样本中心点为$\overline{m} = 25.00$, $\overline{\frac{1}{t^2}} = 1.7696$, 最小二乘法拟合后的直线过样本中心点，所以

$$b_2 = 2.6384\ \mathrm{g}.$$

(4) 两个拟合结果的相关系数是相同的，这是因为式(30)对于x，y是对称的。从式(29)、式(31)和式(30)可以看出：

$$r = \sqrt{k_1 k_2}$$

4 思考题

1. **结合实测数据分析系统误差和随机误差对于钢杯体积不确定度的贡献**
   答： 在测量钢杯含钢体积时，随机误差带来的不确定度为$\sigma_{\bar{X}} = 0.0007$ cm，而游标卡尺的允差带来的不确定度为$\sigma_e = 0.0012$ cm。将随机误差与允差带来的不确定度进行方和跟合成得到的总不确定度为$\sigma_X = 0.0014$ cm。可以看出，随机误差对总不确定度的贡献小于允差的贡献。钢杯含钢体积是由D, H, d, h算得的，因此可以得出在钢杯含钢体积测量结果的不确定度中，随机误差的贡献还是小于系统误差的贡献。

2. **结合实测数据分析系统误差和随机误差对于小钢球体积不确定度的贡献**
   答：在测量小钢球体积时，随机误差带来的不确定度为$\sigma_{\bar{d}} = 0.00004$ cm，而螺旋测微器的允差带来的不确定度为$\sigma_e = 0.00023$ cm。将随机误差与允差带来的不确定度进行方和跟合成得到的总不确定度为$\sigma_d = 0.00023$ cm。可以看出，随机误差对总不确定度的贡献远小于仪器允差的贡献。小钢珠的体积是由d算得的，因此可以得出在钢珠体积测量结果的不确定度中，随机误差的贡献还是远小于系统误差的贡献。

5 分析讨论与感想

1. 误差伴随着物理实验的每一个步骤。对误差知识的了解直接关系到在实验中如何计算误差，如何设计合理的实验流程、选择合适的仪器设备来减小误差。更重要的是，许多科学发现都与误差息息相关，稀有气体的发现，包括LIGO探测到可疑引力波信号的确认，都要与误差打交道。通过**"测量误差和数据处理"**实验的学习，我掌握了评估误差和计算误差的基本方法，加深了对误差概念的理解。我也在课后练习中练习了使用最小二乘法进行线性拟合，以及使用坐标纸绘图。这些基本技能的训练会为今后的实验打好基础。

2. 在使用游标卡尺测量钢杯含钢体积和使用千分尺测量小钢珠体积的实验中，我学会了正确使用游标卡尺和千分尺进行测量。这里感谢李源老师在实验过程中耐心的指导和检查。

参考文献

[1] 吕斯骅, 段家忯, 张朝晖. *新编基础物理实验*. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[2] 吕斯骅. *全国中学生物理竞赛实验指导书*. 北京: 北京大学出版社, 2006.

[3] 陈家鼎，郑忠国. *概率与统计*. 北京: 北京大学出版社, 2007.